ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 29, № 147 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-244-254

УДК 517.518

# Оптимальные оценки количества звеньев базисных горизонтальных ломаных для 2-ступенчатых групп Карно с горизонтальным распределением коранга 1

**Александр Валерьевич ГРЕШНОВ, Роман Иванович ЖУКОВ**

ФГАОУ ВО «Новосибирский государственный университет»

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 1

**Аннотация.** Доказано, что для 2-ступенчатой группы Карно $\mathbb{D}_n$ с горизонтальным распределением коранга 1, $\dim \mathbb{D}_n = n+1$, минимальное число $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}$ такое, что любые две точки $u, v \in \mathbb{D}_n$ можно соединить базисной горизонтальной $k$-ломаной (ломаной, состоящей из $k$ звеньев) $L_k^{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}(u,v)$, $k \leq N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}$, не превосходит $n+2$. Построены примеры групп $\mathbb{D}_n$, для которых $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}} = n+i$, $i=1,2$. Здесь $\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ — набор базисных левоинвариантных горизонтальных векторных полей алгебры Ли группы $\mathbb{D}_n$, а звено ломаной $L_k^{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}(u,v)$ имеет вид $\exp(asX_i)(w)$, $s \in [0, s_0]$, $a = const$.

**Ключевые слова:** горизонтальные кривые, ломаные, теорема Рашевского–Чоу, 2-ступенчатые группы Карно, базисные векторные поля

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00319, https://rscf.ru/project/24-21-00319/).

**Для цитирования:** *Грешнов А.В., Жуков Р.И.* Оптимальные оценки количества звеньев базисных горизонтальных ломаных для 2-ступенчатых групп Карно с горизонтальным распределением коранга 1 // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 244–254. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-244-254

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-244-254

# Optimal estimates of the number of links of basis horizontal broken lines for 2-step Carnot groups with horizontal distribution of corank 1

**Alexandr V. GRESHNOV, Roman I. ZHUKOV**
Novosibirsk State University
1 Pirogova St., Novosibirsk 630090, Russian Federation

**Abstract.** For a 2-step Carnot group $\mathbb{D}_n$, $\dim \mathbb{D}_n = n+1$, with horizontal distribution of corank 1, we proved that the minimal number $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}$ such that any two points $u, v \in \mathbb{D}_n$ can be joined by some basis horizontal $k$-broken line (i.e. a broken line consisting of $k$ links) $L_k^{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}(u,v)$, $k \le N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}$, does not exeed $n+2$. The examples of $\mathbb{D}_n$ such that $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}} = n+i$, $i = 1, 2$, were found. Here $\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n} = \{X_1, \dots, X_n\}$ is the set of left invariant basis horizontal vector fields of the Lie algebra of the group $\mathbb{D}_n$, and every link of $L_k^{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}(u,v)$ has the form $\exp(asX_i)(w)$, $s \in [0, s_0]$, $a = const$.

**Keywords:** horizontal curves, broken lines, Rashevskii–Chow theorem, 2-step Carnot groups, basis vector fields

**Acknowledgements:** The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00319, https://rscf.ru/project/24-21-00319/).

**Mathematics Subject Classification:** 53C17, 43A80.

**For citation:** Greshnov A.V., Zhukov R.I. Optimal estimates of the number of links of basis horizontal broken lines for 2-step Carnot groups with horizontal distribution of corank 1. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 244–254. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-244-254 (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Рассмотрим связное гладкое многообразие $\mathcal{M}$, $\dim \mathcal{M} = N$ и $C^\infty$-гладкие векторные поля $\mathcal{X}_\mathcal{M} = \{X_1, \dots, X_m\}$, $m < N$, удовлетворяющие условию Хермандера на $\mathcal{M}$ (субриманово многообразие). Векторные поля $X_1, \dots, X_m$ и подрасслоение $H_\mathcal{M} \subset T\mathcal{M}$, натянутое на $X_1, \dots, X_m$, называются *горизонтальными*. Абсолютно непрерывная кривая $\gamma = \gamma(s) : [0, s_0] \to \mathcal{M}$ называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma(s) \in H_\mathcal{M}(\gamma(s))$ почти всюду. Хорошо известна следующая

**Теорема 0.1** (Рашевский–Чоу [1,2])**.** *Любые две точки $u, v \in \mathcal{M}$ могут быть соединены некоторой горизонтальной кривой $\gamma \subset \mathcal{M}$, состоящей из конечного числа отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей $X_1, \dots, X_m$.*

Отметим следующий более точный (по сравнению с теоремой 0.1) результат.

**Теорема 0.2.** [2] *Любые две точки $u, v \in \mathcal{M}$ могут быть соединены горизонтальной кривой в $\mathcal{M}$, состоящей не более чем из $2N$ отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей $X_1, \dots, X_m$.*

Расстояние Карно–Каратеодори на $\mathcal{M}$ определяется как

$$d_{cc}(u, v) = \inf\{l_\mathcal{M}(\gamma) \mid \gamma \text{ — горизонтальная кривая, соединяющая } u, v\};$$

длина $l_\mathcal{M}(\gamma)$ абсолютно непрерывной кривой $\gamma = \gamma(s)$, $s \in [0, s_0]$, определяется при помощи скалярного Риманова произведения обычным способом. Пара $(\mathcal{M}, d_{cc})$ называется *пространством Карно–Каратеодори* [1–3]. Важнейшим частным случаем пространств Карно–Каратеодори являются *группы Карно* $\mathbb{G}$ [3–5].

В контексте теорем 0.1, 0.2 кривую, состоящую из отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей $X_1, \dots, X_m$, естественно называть (горизонтальной) ломаной. При этом, при выбранном базисе $\mathcal{X}_\mathcal{M}$ горизонтального подрасслоения $H_\mathcal{M}$, также естественно определять горизонтальную ломаную как кривую, состоящую из отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей вида $\sum\limits_{i=1}^m a_i X_i$, $a_i = const$.

О п р е д е л е н и е 0.1. Пусть $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_r\}$ — гладкие векторные поля, определенные на некоторой области $U \subset \mathbb{R}^N$. Положим

$$a_J Y = \sum_{j=1}^r a_j Y_j, \quad a_J = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r, \qquad a_i = const.$$

Обозначим через $\exp(a_J Y)(u)$, $u \in U$, точку интегральной линии $\exp(s a_J Y)(u)$, $s \geq 0$, горизонтального векторного поля $a_J Y$, соответствующую значению $s = 1$; для простоты мы полагаем, что выражение $\exp(a_J Y)(u)$ корректно определено для каждого вектора $a_J$. По индукции определим *$k$-ломаную $L_k(x_0, x_k)$, состоящую из $k$ сегментов $I_i$, $i = 1, \dots, k$, ( имеющую $k$ звеньев )* и $k+1$ *вершин* в точках $x_0, \dots, x_k$ с началом в точке $x_0$ и концом в точке $x_k$ :

$$L_k(x_0, x_k) = \bigcup_{i=1}^k I_i, \quad I_i = \bigcup_{s \in [0,1]} \exp(s a_{J_i} Y)(x_{i-1}), \quad \exp(a_{J_i} Y)(x_{i-1}) = x_i, \quad |a_{J_i}| \neq 0. \quad (0.1)$$

Если в (0.1) мы рассматриваем только такие $a_J$, где всего лишь одна компонента не равна 0, то такие ломаные мы будем называть $\mathcal{Y}$-*базисными* и использовать в этом случае обозначение $L_k^{\mathcal{Y}}(x_0, x_k)$.

В серии работ [6–9] была исследована задача о нахождении минимального числа $N_{\mathcal{M}}$ такого, что любые две точки $x, y \in \mathcal{M}$ соединяются горизонтальной $k$-ломаной, $k \leq N_{\mathcal{M}}$: для серии групп Карно $\mathbb{G}$ были найдены значения величины $N_{\mathbb{G}}$, и полученные результаты показывают, что значение $2N$ из теоремы 0.2 здесь не оптимально. Но, с другой стороны, подходы работ [6–9] основаны на определении 0.1, тогда как теоремы 0.1, 0.2 доказываются для горизонтальных ломаных вида $L_k^{\mathcal{X}_{\mathcal{M}}}$.

Пусть $N_{\mathcal{X}_{\mathcal{M}}}$ — минимальное натуральное число такое, что любые две точки $x, y \in \mathcal{M}$ соединяются горизонтальной ломаной $L_k^{\mathcal{X}_{\mathcal{M}}}$, где $k \leq N_{\mathcal{X}_{\mathcal{M}}}$. В настоящей работе для канонических 2-ступенчатых групп Карно $\mathbb{D}_n$ с горизонтальным распределением коранга 1 мы установили, что $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}} \leq n+2$, где $\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}$ — базис горизонтальных левоинвариантных векторных полей (базис Якоби) группы $\mathbb{D}_n$ (теорема 3.1, следствие 3.1); здесь $\dim \mathbb{D}_n = n+1$, $n \geq 2$. Отметим, что из общих соображений следует, что $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}} \geq n+1$. При этом для групп Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^k$, $k \in \mathbb{N}$, (частный случай групп $\mathbb{D}_n$) мы получили, см. теоремы 2.1, 2.2, что

$$N_{\mathcal{X}_{\mathbb{H}_\alpha^k}} = \begin{cases} 4, & k = 1, \\ 2k+1, & k > 1. \end{cases}$$

Полученные результаты интересно сопоставить со следующим фактом: $N_{\mathbb{D}_n} = 3$ для любого $n \geq 2$ [7].

Группы Карно $\mathbb{D}_n$ являются предметом специального исследования в геометрическом анализе, см., например, [10]. В работе [11] были найдены точные значения константы $q_2$ в обобщенном неравенстве треугольника для Box-квазиметрик групп $\mathbb{D}_n$; точные значения константы $q_2$ играют существенную роль в получении точных оценок в теоремах о точках совпадения липшицевых и накрывающих отображений в $(q_1, q_2)$-квазиметрических пространствах [12–14].

Полученные в теоремах 2.1, 2.2, 3.1 результаты говорят о том, что универсальная оценка теоремы 0.2 в контексте настоящей работы не является оптимальной даже при том, что класс горизонтальных ломаных (определение 0.1) был сужен до класса «базисных» горизонтальных ломаных. Из доказательства теоремы 2.2 вытекает, что для любой выделенной точки $M_0 \in \mathbb{D}_n$ почти все точки $M \in \mathbb{D}_n$, $M_0 \neq M$, могут быть соединены с $M_0$ базисными горизонтальными $k$-ломаными, $k \leq n+1$. Совершенно правдоподобно выглядит гипотеза о том, что для любой выделенной точки $M_0 \in \mathbb{G}$ почти все точки $M \in \mathbb{G}$, $M_0 \neq M$, могут быть соединены с $M_0$ базисными горизонтальными $k$-ломаными, $k \leq \dim \mathbb{G}$.

## 1. Предварительные замечания

В наших рассмотрениях мы будем определять группы Карно как канонические группы Ли. *Канонической $N$-мерной группой Ли* [15, Глава IV] называется аналитическая группа Ли $G$ такая, что ее экспоненциальное отображение $Exp : \mathbb{R}^N \to G$ является тождественным; таким образом, любой элемент $x \in G$ однозначно определяется координатной записью $x = (x_1, \ldots, x_N)$, точка $O_G = (0, \ldots, 0)$ (начало координат $\mathbb{R}^N$) является нейтральным элементом, $x^{-1} = (-x_1, \ldots, -x_N)$, групповая операция $P_x^G x' = x \cdot x'$ для любых $x, x' \in G$ (левый сдвиг элемента $x'$ на элемент $x$) определяется посредством формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа, а таблица коммутаторов определяется на базисных единичных векторах $\{e_i\}_{i=1,\dots,N}$ of $\mathbb{R}^N$. Значения базисных левоинвариантных векторных полей (поля Якоби [4, Section 1.2.2]) $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ алгебры Ли $V$ канонической группы Ли $G$ в произвольной точке $x \in G$ определяется как

$$(X_1, \dots, X_N)(x) = \frac{\partial P_x^G x'}{\partial x'}\Big|_{x'=0}, \qquad x' = (x_1', \dots, x_N').$$

Мы имеем $\exp(s \sum\limits_{i=1}^{N} x_i' X_i)(x) = P_x^G sx' = x \cdot (sx')$, $s \in [0, s_0]$. Поэтому нам достаточно доказывать теоремы о соединимости горизонтальнми ломаными только пар точек $O_{\mathbb{G}}$ и $M$, где $M$ — произвольная точка рассматриваемой группы Карно $\mathbb{G}$.

## 2. Горизонтальные ломаные на группах Гейзенберга $\mathbb{H}_n^\alpha$

$n$-группа Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^n$ определяется в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ с системой координат $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, t)$, индуцированной координатным репером

$$(O_{\mathbb{H}_\alpha^n}, e_1, e_2, \dots, e_{2n-1}, e_{2n}, e_{2n+1}),$$

при помощи следующей таблицы коммутаторов

$$\begin{cases} [e_{2j-1}, e_{2j}] = \alpha e_{2n+1}, & j = 1, \dots, n, \quad \alpha > 0, \\ [e_j, e_{2n+1}] = 0, & j = 1, \dots, 2n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа [16, Лекция 6] и таблицу (2.1), мы получаем следующее аналитическое выражение левого сдвига $P_w^{\mathbb{H}_\alpha^n} w'$ произвольного элемента $w' = (x_1', y_1', \dots, x_n', y_n', t') \in \mathbb{H}_\alpha^n$ на произвольный элемент $w = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, t) \in \mathbb{H}_\alpha^n$:

$$P_w^{\mathbb{H}_\alpha^n} w' = w \cdot w' = \Big(x_1 + x_1', y_1 + y_1', \dots, x_n + x_n', y_n + y_n', t + t' + \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i' - x_i' y_i)\Big). \tag{2.2}$$

Используя (2.2), мы получаем выражения для базиса левоинвариантных векторных полей группы $\mathbb{H}_\alpha^n$ в каждой точке $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, t)$:

$$X_i = e_{2i-1} - \frac{\alpha}{2} y_i e_{2n+1}, \qquad Y_i = e_{2i} + \frac{\alpha}{2} x_i e_{2n+1}, \qquad T = e_{2n+1},$$

где $i = 1, \dots, n$. Левоинвариантные векторные поля $\{X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n\}$ — горизонтальные; полагаем $\mathcal{X}_{\mathbb{H}_\alpha^n} = \{X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n\}$.

**Теорема 2.1.**

$1^0$ *Любая точка* $M = (x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{H}_\alpha^1$, $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$, *соединяется с началом координат* $O_{\mathbb{H}_\alpha^1}$ *некоторой базисной горизонтальной* $k$*-ломаной, где* $k \leq 3$;

$2^0$ *любая точка* $M = (0, 0, z_0) \in \mathbb{H}_\alpha^1$, $t_0 \neq 0$, *соединяется с началом координат* $O_{\mathbb{H}_\alpha^1}$ *некоторой базисной горизонтальной* 4*-ломаной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $1^0$ Мы имеем

$$(a, 0, 0)(0, b, 0)(c, 0, 0) = \big(a + c, b, \frac{\alpha}{2} b(a - c)\big).$$

Пусть

$$\big(a+c, b, \frac{\alpha}{2}b(a-c)\big) = (x_0, y_0, t_0), \tag{2.3}$$

тогда

$$x_0 = a+c, \quad y_0 = b, \qquad z_0 = \frac{\alpha}{2}y_0(2a-x_0). \tag{2.4}$$

Пусть $y_0 \neq 0$ — фиксированное число. Тогда, произвольно меняя $a$ при фиксированном $x_0$, из (2.4) мы получаем, что $t_0$ может принимать любое значение. Таким образом, для любой точки $M = (x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{H}^1_\alpha$, $y_0 \neq 0$, найдутся числа $a, b, c$ такие, что выполняется (2.3). Откуда вытекает, что найдется горизонтальная базисная $k$-ломаная, $k \leq 3$, соединяющая $O_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ и $M$.

Аналогично доказывается, что для любой точки $M' = (x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{H}^1_\alpha$, $x_0 \neq 0$, найдутся числа $a, b, c$ такие, что

$$(0, a, 0)(b, 0, 0)(0, c, 0) = \big(b, a+c, \frac{\alpha}{2}b(c-a)\big) = M'.$$

Откуда вытекает, что найдется горизонтальная базисная $k$-ломаная, $k \leq 3$, соединяющая $O_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ и $M'$.

П. $2^0$ вытекает из следующего очевидного тождества

$$(a, 0, 0)(0, b, 0)(-a, 0, 0)(0, -b, 0) = (0, 0, \alpha ab).$$

При этом несложно убедиться в том, что не существует базисной горизонтальной $k$-ломаной, $k < 4$, соединяющей точки $O_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ и $M = (0, 0, t_0) \in \mathbb{H}^1_\alpha$, $t_0 \neq 0$. □

**Теорема 2.2.**

$1^0$ *Любая точка* $M = (x^0_1, y^0_1, \dots, x^0_n, y^0_n, t_0) \in \mathbb{H}^n_\alpha$, $(x^0_1)^2 + (y^0_1)^2 + \ldots + (x^0_n)^2_0 + (y^0_n)^2 \neq 0$, *соединяется с началом координат* $O_{\mathbb{H}^n_\alpha}$ *некоторой базисной горизонтальной* $k$*-ломаной, где* $k \leq 2n+1$;

$2^0$ *любая точка* $M = (0, \dots, 0, t_0) \in \mathbb{H}^n_\alpha$, $t_0 \neq 0$, *соединяется с началом координат* $O_{\mathbb{H}^n_\alpha}$ *некоторой базисной горизонтальной* $4$*-ломаной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай $\mathbb{H}^2_\alpha$, откуда с очевидностью вытекает и общий случай.

$1^0$ Мы имеем

$$\exp(y^0_1 Y_1) \circ \exp(x^0_1 X_1)(O_{\mathbb{H}^2_\alpha}) = (x^0_1, y^0_1, 0, 0, \frac{\alpha}{2}x^0_1 y^0_1) = M'_1.$$

Теперь пусть $y^0_2 \neq 0$. Тогда, используя рассуждения п. $1^0$ из теоремы 2.1, мы получаем, что для любых $x^0_2$, $t_0$ найдутся числа $a, b, c$ такие, что

$$\exp(cX_2) \circ \exp(bY_2) \circ \exp(aX_2)(M'_1) = (x^0_1, y^0_1, x^0_2, y^0_2, \frac{\alpha}{2}y^0_2(2a - x^0_2) + \frac{\alpha}{2}x^0_1 y^0_1) = (x^0_1, y^0_1, x^0_2, y^0_2, t_0).$$

Аналогично проводятся рассуждения для $x^0_2 \neq 0$.

Случай точки $M = (x^0_1, y^0_1, 0, 0, t_0)$ вытекает из теоремы 2.1.

П. $2^0$ доказывается так же, как и п. $2^0$ из теоремы 2.1. □

## 3. Горизонтальные ломаные на 2-ступенчатых группах Карно $\mathbb{D}_n$ с горизонтальным распределением коранга 1

Каноническая 2-ступенчатая группа $\mathbb{D}_n$ с горизонтальным распределением коранга 1 в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ с системой координат $(x_1,\dots,x_n,t)$ и координатным репером $(O_{\mathbb{D}_n},e_1,\dots,e_n,e_{n+1})$ определяется при помощи следующей таблицы коммутаторов

$$[e_i,e_j]=\alpha_{ij}e_{n+1},\qquad \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}^2\neq 0, \tag{3.1}$$

все остальные возможные коммутаторы $e_1,\dots,e_{n+1}$ равны 0. Пусть $x=(x_1,\dots,x_n,t)$, $x=(x'_1,\dots,x'_n,t')$. Используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа [16, Лекция 6], при помощи (3.1) мы получаем

$$P_x^{\mathbb{D}_n}x'=x\cdot x'=\Big(x_1+x'_1,\dots,x_n+x'_n,\ t+t'+\sum_{i,j=1,\dots,n,\,i<j}\frac{\alpha_{ij}}{2}(x_ix'_j-x_jx'_i)\Big).$$

Значения базисных левоинвариантных векторных полей $X_1,\dots,X_n,T$ группы $\mathbb{D}_n$ в каждой точке $u=(x_1,\dots,x_n,t)$ определяются как

$$(X_1,\dots,X_n,T)(u)=\frac{\partial P_u^{\mathbb{D}_n}(x'_1,\dots,x'_n,t')}{\partial(x'_1,\dots,x'_n,t')}\Big|_{(x'_1,\dots,x'_n,t')=(0,\dots,0)}.$$

Левоинвариантные векторные поля $\{X_1,\dots,X_n\}$ — горизонтальные; полагаем $\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}=\{X_1,\dots,X_n\}$.

**Теорема 3.1.**

$1^0$ *Любая точка* $M_{t_0}=(0,\dots,0,t_0)\in\mathbb{D}_n$, $t_0\neq 0$, *соединяется с началом координат* $O_{\mathbb{D}_n}$ *некоторой базисной горизонтальной* 4*-ломаной.*

$2^0$ *Любая точка* $M=(x_1^0,\dots,x_n^0,t_0)\in\mathbb{D}_n$, $(x_1^0)^2+\ldots+(x_n^0)^2\neq 0$, *соединяется с началом координат* $O_{\mathbb{D}_n}$ *некоторой базисной горизонтальной* $k$*-ломаной, где* $k\le n+2$.

Доказательство. $1^0$ Пусть, например, $\alpha_{12}\neq 0$. Тогда п. $1^0$ вытекает из следующего тождества

$$\exp(-sX_2)\circ\exp(-sX_1)\circ\exp(sX_2)\circ\exp(sX_1)(O_{\mathbb{D}_n})=\exp(s^2T)(O_{\mathbb{D}_n}).$$

$2^0$ Обозначим $\alpha=(\alpha_{11},\alpha_{12},\dots,\alpha_{n-1,n})$, $(\hat{x}^0)^\tau=(x_1^0,\dots,x_n^0)$. Мы имеем

$$\begin{aligned}\exp(bX_1)\circ\exp(x_n^0X_n)\circ\ldots\circ\exp(x_2^0X_2)\circ\exp(aX_1)(O_{\mathbb{D}_n})&\\ =\Big(b+a,x_2^0,\dots,x_n^0,f_1+\frac{(a-b)}{2}\sum_{i=2}^{n}\alpha_{1i}x_i^0\Big)&\\ =\big(b+a,x_2^0,\dots,x_n^0,f_1+(a-b)P_1(\alpha,\hat{x}^0)\big),&\end{aligned} \tag{3.2}$$

где выражение $f_1$ не зависит от $a,b$. Приравнивая правую часть (3.2) к $(x_1^0,\dots,x_n^0,t_0)$, мы получаем

$$\begin{cases}x_1^0=a+b,\\ t_0=f_1+\frac{(x_1^0-2b)}{2}\sum\limits_{i=2}^{n}\alpha_{1i}x_i^0.\end{cases}$$

Если $\sum\limits_{i=2}^{n} \alpha_{1i} x_i^0 \neq 0$, то, меняя $b$ произвольным образом, мы получаем, что $t_0$ принимает произвольные значения из $\mathbb{R}$.

Теперь предположим, что $\sum\limits_{i=2}^{n} \alpha_{1i} x_i^0 = 0$. Мы имеем

$$\begin{aligned} &\exp(bX_2) \circ \exp(x_n^0 X_n) \circ \ldots \exp(x_3^0 X_3) \circ \exp(x_1^0 X_1) \circ \exp(aX_2)(O_{\mathbb{D}_n}) \\ &\quad = \Big(x_1^0, b+a, x_3^0, \ldots, x_n^0, f_2 + \frac{(a-b)}{2}\Big(-\alpha_{12}x_1^0 + \sum_{i=3}^{n} \alpha_{2i} x_i^0\Big)\Big) \\ &\quad = \big(x_1^0, b+a, \ldots, x_n^0, f_1 + (a-b)P_2(\alpha, \hat{x}^0)\big), \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $f_2$ не зависит от $a, b$. Приравнивая правую часть (3.3) к $(x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)$, мы получаем

$$\begin{cases} x_2^0 = a + b, \\ t_0 = f_2 + \frac{(x_2^0 - 2b)}{2}\Big(-\alpha_{12}x_1^0 + \sum\limits_{i=3}^{n} \alpha_{2i} x_i^0\Big)\Big). \end{cases}$$

Если $-\alpha_{12}x_1^0 + \sum\limits_{i=3}^{n} \alpha_{2i} x_i^0 \neq 0$, то, меняя $b$ произвольным образом, мы получаем, что $t_0$ принимает произвольные значения из $\mathbb{R}$.

Далее по аналогии будем рассматривать композиции

$$\exp(bX_i) \circ \ldots \circ \exp(x_{i+1}^0 X_{i+1}) \circ \exp(x_{i-1}^0 X_{i-1}) \circ \ldots \circ \exp(x_1^0 X_1) \circ \exp(aX_i)(O_{\mathbb{D}_n}),$$

где $i = 3, \ldots, n$.

В результате мы получаем, что любая точка $M = (x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) \in \mathbb{D}_n$, $(x_1^0)^2 + \ldots + (x_n^0)^2 \neq 0$, для которой выполняется

$$P_1^2(\alpha, x^0) + \ldots + P_n^2(\alpha, x^0) \neq 0,$$

может быть соединена с $O_{\mathbb{D}_n}$ некоторой горизонтальной $k$-ломаной, где $k \leq n+1$.

Теперь предположим, что вектор $\hat{x}^0$ таков, что

$$P_i(\alpha, \hat{x}^0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Условия (3.4) можно записать в следующем виде

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ldots & \vdots \\ -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{0} = A\hat{x}^0.$$

Заметим, что матрица $A$ кососимметрическая, и хорошо известно, что $\dim Ker\, A \leq n-2$. Таким образом, в рассматриваемой ситуации мы имеем $\hat{x}^0 \in Ker\, A$. Но тогда найдется базисный вектор $e_i \in \mathbb{R}^n$ и число $s_0 > 0$ такие, что

$$\hat{x}^0 + s_0 e_i \notin Ker\, A.$$

Действительно, если, например, $\alpha_{12} \neq 0$, то подойдет вектор $e_2$. Тогда рассмотрим точку $M_1 = \exp(s_0 X_2)(M)$, $M = (\hat{x}^0, t_0)$. Так как первые $n$ координат совпадают с $\hat{x}^0 + s_0 e_i$, то из предыдущих рассуждений мы получаем, что точка $M_1$ соединяется с $O_{\mathbb{D}_n}$ базисной горизонтальной $k$-ломаной, где $k \le n+1$. Поэтому точка $M$ соединяется с $O_{\mathbb{D}_n}$ горизонтальной $k$-ломаной, где $k \le n+2$.

Теперь посмотрим на конструкцию подходящих базисных горизонтальных ломаных немного по-другому. Пусть, например, $\alpha_{12} \neq 0$. И пусть $x_2^0 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\exp(bX_1)\circ\exp(x_2^0X_2)\circ\exp(aX_1)\circ\exp(x_n^0X_n)\circ\ldots\circ\exp(x_3^0X_3)(O_{\mathbb{D}_n})&\\ = (a+c, x_2^0,\ldots,x_n^0, f' + \frac{\alpha_{12}}{2}x_0^2(a-b))&\\ = (x_1^0, x_2^0,\ldots,x_n^0, f' + \frac{\alpha_{12}}{2}x_0^2(x_1^0-2b)),&\end{aligned}$$

где $f'$ зависит от $x_1^0,\ldots,x_n^0$, и не зависит от $b$. Тогда, меняя $b$ произвольно, $x_1^0 = a+b$ мы получаем, что для любой точки $M_{x_2^0} = (x_1^0, x_2^0,\ldots,x_n,t_0) \in \mathbb{D}_n$, $x_2^0 \neq 0$, $\alpha_{12}\neq 0$, найдется базисная горизонтальная $k$-ломаная, $k \le n+1$, соединяющая точки $O_{\mathbb{D}_n}$ и $M_{x_2^0}$. Точно так же доказывается, см. теорему 2.1, что для любой точки $M_{x_1^0} = (x_1^0, x_2^0,\ldots,x_n,t_0)\in\mathbb{D}_n$, $x_1^0\neq 0$, $\alpha_{12}\neq 0$, найдется базисная горизонтальная $k$-ломаная, $k\le n+1$, соединяющая точки $O_{\mathbb{D}_n}$ и $M_{x_2^0}$. Теперь рассмотрим случай, когда $x_1^0 = x_2^0 = 0$, $t_0\neq 0$, $\alpha_{ij} = 0$ для всех $(ij)\neq(12)$, $\alpha_{12}\neq 0$. В этом случае горизонтальная $(n+2)$-ломаная строится следующим образом: сначала мы соединяем точки $O_{\mathbb{D}_n}$ и $\exp(t_0T)(O_{\mathbb{D}_n})$ при помощи горизонтальной 4-ломаной из п. $1^0$, далее строим горизонтальную $(n-2)$-ломаную, соединяющую точки с координатами $(0,\ldots,0,t_0)$ и $(0,0,x_3^0,\ldots,x_n^0,t_0)$, используя тот факт, что в рассматриваемой ситуации мы имеем

$$\exp(x_n^0)\circ\ldots\circ\exp(x_3^0X_3)\circ\exp(t_0T)(O_{\mathbb{D}_n}) = (0,0,x_3^0,\ldots,x_n^0,t_0).$$

Теорема 3.1 доказана. □

**Следствие 3.1.** *Если группа $\mathbb{D}_n$ такова, что $\alpha_{12}\neq 0$ и $\alpha_{ij}=0$ для всех $(ij)\neq(12)$ (к таким группам относится, в частности, группа $\mathbb{H}_\alpha^1$), то $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}} = n+2$.*

**Следствие 3.2.** *Почти все точки группы $\mathbb{D}_n$ соединяются с началом координат $O_{\mathbb{D}_n}$ базисными горизонтальными $k$-ломаными, где $k\le n+1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В доказательстве теоремы 3.1 мы получили, что все точки $M = (x_1^0,\ldots,x_n^0,t_0)\in\mathbb{D}_n$, $(x_1^0)^2+\ldots+(x_n^0)^2\neq 0$, $(x_1^0,\ldots,x_n^0)\notin Ker\,A$, соединяются с $O_{\mathbb{D}_n}$ некоторой базисной горизонтальной $(n+1)$-ломаной. □

## References


[1] M. Gromov, "Carnot–Carathéodory spaces seen from within", *Sub-Riemannian Geometry*, Progress in Mathematics, **144**, Birkhäuser, Basel, 1996, 79–323.

[2] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry*, Cambridge, Cambridge University Press, 2020.

[3] S. K. Vodopyanov, "Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings", *Contemporary Mathematics*, **424** (2007), 247–301.

[4] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their sub-Laplacian*, Berlin–Heidelberg, Springer–Verlag, 2007.

[5] P. Pansu, "Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un", *Ann. Math.*, **129**:1 (1989), 1–60.

[6] A. Greshnov, “Optimal horizontal joinability on the Engel group”, *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Rendiconti Lincei Matematica E Applicazioni*, **32**:3 (2021), 535–547.

[7] А. В. Грешнов, Р. И. Жуков, “Горизонтальная соединимость на канонической 3-ступенчатой группе Карно с горизонтальным распределением коранга 2”, *Сиб. матем. журн.*, **62**:4 (2021), 736–746; англ. пер.:A. V. Greshnov, R. I. Zhukov, “Horizontal joinability in canonical 3-step Carnot groups with corank 2 horizontal distributions”, *Siberian Math. J.*, **62**:4 (2021), 598–606.

[8] А. В. Грешнов, Р. И. Жуков, “Горизонтальная соединимость на 5-мерной 2-ступенчатой группе Карно с горизонтальным распределением коразмерности 2”, *Алгебра и логика*, **62**:2 (2023), 205–218; англ. пер.:A. V. Greshnov, R. I. Zhukov, “Horizontal joinability on 5-dimensional 2-step Carnot groups with a codimension 2 horizontal distribution”, *Algebra and Logic*, **62**:2 (2023), 137–147.

[9] А. В. Грешнов, “Метод Аграчева–Барилари–Боскайна и оценки числа звеньев горизонтальных ломаных, соединяющих точки в канонической группе Карно $G_{3,3}$”, *Оптимальное управление и динамические системы*, Сборник статей. К 95-летию академика Реваза Валериановича Гамкрелидзе, Труды МИАН, **321**, МИАН, М., 2023, 108–117; англ. пер.:A. V. Greshnov, “The Agrachev–Barilari–Boscain Method and Estimates for the Number of Segments of Horizontal Broken Lines Joining Points in the Canonical Carnot Group $G_{3,3}$”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **321**:1 (2023), 97–106.

[10] Z. M. Balogh, A. Kristály, K. Sipos, “Jacobian determinant inequality on corank1 Carnot groups with applications”, *Journal of Functional Analysis*, **277**:12 (2019), 1–36.

[11] A. Greshnov, V. Potapov, “About coincidence points theorems on 2-step Carnot groups with 1-dimensional centre equipped with Box-quasimetrics”, *AIMS Mathematics*, **8**:3 (2023), 6191–6205.

[12] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория $(q_1, q_2)$-квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Доклады РАН*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “The theory of $(q_1, q_2)$-quasimetric spaces and coincidence points”, *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.

[13] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “$(q_1, q_2)$-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 3–32; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “$(q_1, q_2)$-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points”, *Izvestiya Mathematics*, **82**:2 (2018), 245–272.

[14] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “$(q_1, q_2)$-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results”, *Fixed Point Theory*, **23**:2 (2022), 473–486.

[15] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978. [L. V. Ovsyannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russian)].

[16] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли*, Наука, М., 1978. [M. M. Postnikov, *Lie Groups and Lie Algebras. Lectures in Geometry. Semester V*, Nauka Publ., Moscow, 1982 (In Russian)].

### Информация об авторах

**Грешнов Александр Валерьевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: a.greshnov@g.nsu.ru

**ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-1218-2767

### Information about the authors

**Alexandr V. Greshnov**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Mathematical Analysis Department, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation. E-mail: a.greshnov@g.nsu.ru

**ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-1218-2767

**Жуков Роман Иванович**, ассистент кафедры геометрии и топологии, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация.
E-mail: eifromdc@yandex.ru
**ORCID:** http://orcid.org/0009-0007-0251-4995

Конфликт интересов отсутствует.

**Для контактов:**
Грешнов Александр Валерьевич
E-mail: a.greshnov@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 05.02.2024 г.
Поступила после рецензирования 24.07.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

**Roman I. Zhukov**, Assistant of Geometry and Topology Department, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation.
E-mail: eifromdc@yandex.ru
**ORCID:** http://orcid.org/0009-0007-0251-4995

There is no conflict of interests.

**Corresponding author:**
Alexandr V. Greshnov
E-mail: a.greshnov@g.nsu.ru

Received 05.02.2024
Reviewed 24.07.2024
Accepted for press 13.09.2024